付録 B 複素数のガウス面表示

複素数および複素関数の複素平面（ガウス平面）での表し方と複素数どうしの演算について概略する。
虚数単位を

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{(B.1)}$$

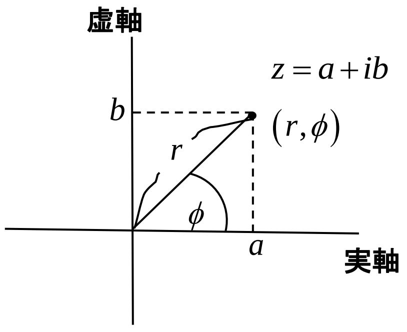
として定義する。従って、

$$(\text{虚数単位})^2 = (i)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \qquad \text{(B.2)}$$

である。ここで、任意の実数aおよびbを用いて、

$$z = a + ib \qquad \text{(B.3)}$$

を**複素数**と言う。この表式でaおよびbをそれぞれ複素数zの**実部**および**虚部**と言う。実数を図形的に表すために数直線が用いられる。任意の実数は、この数直線上の 1 点で与えられる。ところで、複素数は 2 個の実数で表されるので、横軸に実部を取り、縦軸に虚部を取ることで、2 次元平面上の 1 点として複素数を表すことが可能となる。この状況を図 B.1 に表した。



図B.1 複素平面

ところで、図 B.1 に示したように、原点から複素数点までの距離rと原点と複素数点を結ぶ線と実軸との角度を（偏角という）θとすれば、この複素数の実部aおよび虚部bはそれぞれ、

$$a = r\cos\theta \qquad \text{(B.4)}$$

$$b = r\sin\theta \qquad \text{(B.5)}$$

と表せるので、複素数の表現を

$$z = r\cos\theta + i\left(r\sin\theta\right) \qquad \text{(B.6)}$$

と表すことができる。
ところで、ここで新規に複素数の指数関数

$$e^{i\theta} \qquad \text{(B.7)}$$

を考えてみよう。ここに、e は自然対数の低である。そもそも指数関数のべき乗部分は実数として定義された。ところが、今の例ではこれが純虚数になっている。この、純虚数をベキとする指数関数をどのように考えたらよいだろうか。指数関数（B.7）を形式的にマクローリン級数に展開してみよう。

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} ..... + \frac{(i\theta)^n}{n!} + ...$$ これを実部と虚部に分けて、

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - .... + \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + ...\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - .... + \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta \qquad \text{(B.8)}$$

と表すことができる。尚、上式で $\cos\theta$ と $\sin\theta$ のマクローリン展開を使用した。
このように、虚数をベキとする指数関数（B.7）は式（B.8）で定義される**実部が $\cos\theta$ で虚部が $\sin\theta$ の複素数**であることが分かる。
　式（B.8）より、θ を $-\theta$ と変えると、

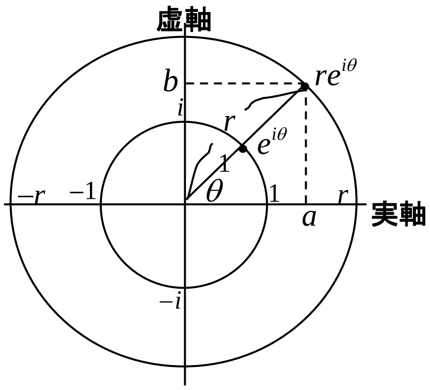
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \qquad \text{(B.9)}$$

と表されるので、（B.8）と組み合わせることで、次の**オイラー(Euler)**の公式が得られる。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{(B.10)}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \text{(B.11)}$$

　複素数　$e^{i\theta}$　を図 B.1 のように複素平面上の点で表し、原点から、この複素数点まで線で引いた有様を図 B.2 に表す。



図B.2 複素平面で表した $e^{i\theta}$ と $re^{i\theta}$

ここで、複素数$e^{i\theta}$の実部は$\cos\theta$であり、虚部は$\sin\theta$である。このように、$e^{i\theta}$は複素平面上では原点を中心とした半径 1 の円（単位円）上にあり、実軸から角度θの位置であることが分かる。

今度は複素数$e^{i\theta}$に実数$r>0$を掛けた$re^{i\theta}$について考える。$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$なので、これを$r$倍したものは

$$re^{i\theta}=r\cos\theta+i\left(r\sin\theta\right) \qquad \text{(B.12)}$$

と表される。複素平面上では図 B.2 に示したように、原点を中心とした半径rの円周上で実軸から角度θの位置である。

これまでのことをまとめると、複素数zの表し方として、

$$z=a+ib \qquad \text{(B.13)}$$

$$=r\cos\theta+i\left(r\sin\theta\right) \qquad \text{(B.14)}$$

$$=re^{i\theta} \qquad \text{(B.15)}$$

の 3 通りが得られる。また、次の関係も重要だ。

$$r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{(B.16)}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{a} \qquad \text{(B.17)}$$

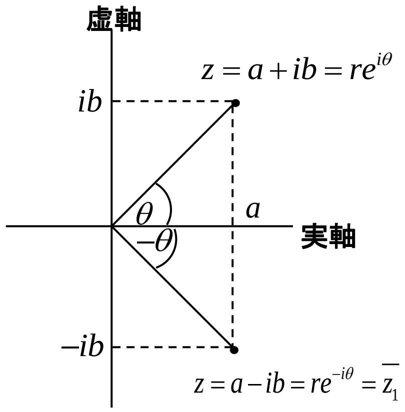
次に、複素数の性質について複素平面を用いて説明する。まず、図 B.3 に示す様に複素数$z=re^{i\theta}$に対して実軸からの角度が$-\theta$である複素数を$\bar{z}=re^{-i\theta}$と書き（これをゼットバーと呼ぶ）、zに共役な複素数と言う。あるいは、複素数zと$\bar{z}$は互いに共役な複素数であると言う。つまり、

$$z = a + ib = re^{i\theta} \tag{B.18}$$

なら、

$$\bar{z} = a - ib = re^{-i\theta} \tag{B.19}$$

である。



図B.3 互いに共役な複素数

次の関係式も大変重要である。

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = a \tag{B.20}$$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = b \tag{B.21}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = r^2 \tag{B.22}$$

複素数の実数倍したものはやはり複素数であり、偏角が変わらないで、動径長が実数倍になる。もし負の実数倍ならば、複素数点の位置は動径が正反対の方向を向き、長さが実数倍となる。このことを式で書くなら、

$$z = a + ib = re^{i\theta}$$

の正の実数t倍は、

$$tz = ta + ibt = tre^{i\theta} \tag{B.23}$$

である。負の数は$t > 0$を用いて　$-t = te^{i\pi}$　と書けるので、負の実数倍は

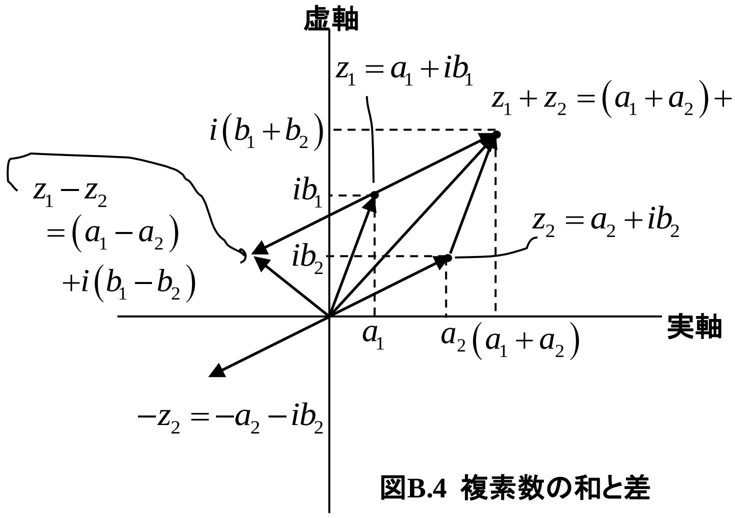
$$-tz = tre^{i(\theta+\pi)} \tag{B.24}$$

と表せる。つまり、動径長を$t > 0$倍して、偏角をπだけ進める（回転させる）のである。

複素数の和は次のように定めることができる。二つの複素数を $z_1 = a_1 + ib_1$ および $z_2 = a_2 + ib_2$ とし、その和を z とすれば、

$$z = z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad \text{(B.25)}$$

と表すことができる。つまり、二つの複素数の和はやはり複素数であり、その**実部と虚部はそれぞれ二つの複素数の実部どうしと虚部どうしの和になる**。この状況を図示したものが図 B.4 である。この結果から、複素数どうしの和はあたかも 2 次元ベクトルの和であるように見える。複素数の和を複素平面上で考えるときは、このようにベクトルの合成を行うことで簡単に可視可できる。この延長で、複素数どうしの差もベクトルの差と同じように描くことができ、複素数同士の演算を複素平面上で見えるようにするのに大変役に立つ。



図B.4 複素数の和と差

次に、複素数のかけ算とわり算を考える。二つの複素数をそれぞれ $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ および $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ とする。その積および商はそれぞれ

$$z = z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad \text{(B.26)}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad \text{(B.27)}$$

と表される。この結果より、二つの複素数の積を作ると、結果はやはり複素数であり、原点から複素数点までの距離**（動径長）は二つの複素数の動径長どうしの積になり、実軸からの角度（偏角）は二つの複素数の偏角の和になる。複素数のわり算では、割った結果は複素数**

になり、その動径長は動径長同士のわり算で与えられ、偏角は二つの偏角の差で与えられる。このことを次の例で確認する。二つの複素数を

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\cos\frac{\pi}{3} + 3i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

とすれば、動径と偏角で計算すると、

$$z = z_1 z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \times 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6\cos\frac{\pi}{2} + 6i\sin\frac{\pi}{2} = 6i$$

他方、実部と虚部で計算すると、

$$z_1 z_2 = \left(\sqrt{3} + i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(i\right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right) = 6i$$

となり、同じ結果が得られる。また、割算に関しては、動径と偏角で計算すると、

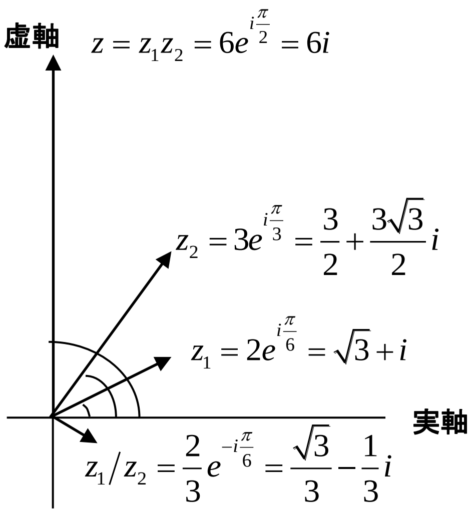
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2}{3}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3}i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$$

同じことを実部と虚部で求めると、

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\left(\sqrt{3} + i\right) \times \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) \times \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right)}{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 3i}{\frac{36}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i$$

であり、やはり同じ結果が得られる。この状況を図示したのが図 B.5 である。尚、第二項から第三項への変形は複素数の有理化と呼ばれる。



図B.5 複素数の積と商

次の例として、複素数の無限級数の和を求めてみよう。例えば、

$$z = 1 + 0.8e^{i\frac{\pi}{3}} + \left(0.8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 + \left(0.8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 + \left(0.8e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 + \ldots\ldots$$

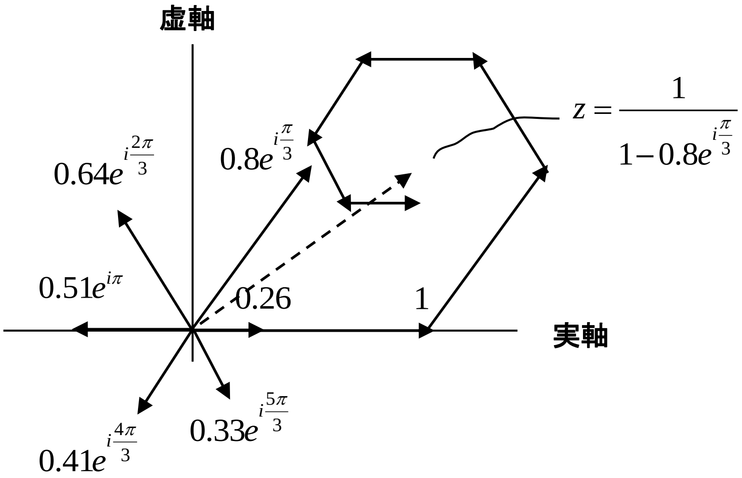
であるが、これは初項が 1 で公比 $0.8e^{i\frac{\pi}{3}}$ という複素数の無限級数である。今の例では、

$$|\text{公比}| = \left|0.8^{\frac{\pi}{3}i}\right| = 0.8 < 1$$

なのでこの無限級数は収束し、級数の和が存在する。この級数の和は実数の級数和と同様にして求められ

$$z = \frac{1}{1 - 0.8e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

となるが、これを複素平面で考えてみよう。図 B.6 に無限級数の各項に対応する複素数を原点から引いたベクトルで表した。このベクトルを実軸上の 1 の位置から次々に足していくと、渦巻きのようなベクトルの和が描ける。この渦巻きが最終的に収束する位置まで点線の矢印で示したが、これが無限級数の和を与える複素数である。



図B.6 複素数無限級数の和

このような複素数の無限級数は物理学の分野で良く見かけるが、とくに身近な例としては波の多重反射に伴う干渉効果を調べることに利用される。無限級数の各項が波の一回反射、二回反射、三回反射、・・・・を表すように問題をセットでき、これら全ての和で最終的な波動場をあたようとするものである。

今までは複素数を

$$z = re^{i\theta} = a + ib$$

と表してきた。ここで、$r>0$、θ、a、およびbは任意の実数である。これの意味はこの複素数は複素平面上では動径長がrで偏角がθの位置で示され、あるいは実軸上でa、虚軸上でbの位置で示されると言うことである。この点はrおよびθを与えれば一意的に決まる。同様にaとbを与えると一意的に決まるので、この複素数zはrとθの**関数**、あるいはaとbの関数と考えることができる。ここで、例えば、rを固定してθを変化させれば、複素数zは複素平面上の半径rの円周上をくるくると動くことになる。これを微分方程式などに応用される場合は、独立変数をθの代わりにxとかtとかで表すことが多い。

次に、複素数の2乗で与えられるモノ

$$f(z) = z^2 = \left(re^{i\theta}\right) = \left(a+ib\right)^2 \quad \text{(B.28)}$$

を考えてみると、これは複素数zの動径を2乗し、偏角を2倍することで一意的に決まる。つまり、これはzの関数と言える。複素数の関数を複素関数という。複素数と複素数との間に対応関係があれば、とにかくそれは関数と考えることが出来る。

$$f(z) = \frac{1}{z_0 - z} \quad \text{(B.29)}$$

も良く見かける関数である。z_0 は複素平面上の固定された点であり、z をいろいろ動かして、(B.29) の関数値（複素数）を考えるものである。

さて、関数の考えが出たところで、実関数の微分法と同様に、複素関数の微分法を考えてみよう。いま、複素関数を実定数 r と実変数 x により $z = re^{ix}$ として与えるとする。実変数が x から $x+\Delta x$ へ変化するとして、複素関数 z の変化分を求め、それを Δx で割ってみよう。x のこの変化に対する複素関数の変化分を Δz と書くと、

$$\Delta z = r\left(e^{i(x+\Delta x)} - e^{ix}\right) = re^{ix}\left(e^{i\Delta x} - 1\right)$$

であり、$e^{i\Delta x}$ をベキ級数に展開すると、

$$\Delta z = r\left(e^{i(x+\Delta x)} - e^{ix}\right) = re^{ix}\left(e^{i\Delta x} - 1\right) = re^{ix}\left(1 + \frac{i\Delta x}{1!} + \frac{(i\Delta x)^2}{2!} + \frac{(i\Delta x)^3}{3!} \ldots\ldots + \frac{(i\Delta x)^n}{n!} + \ldots\ldots - 1\right)$$

となる。これを Δx で割ると、

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{r\left(e^{i(x+\Delta x)} - e^{ix}\right)}{\Delta x} = re^{ix}\left(\frac{e^{i\Delta x} - 1}{\Delta x}\right) = re^{ix}\left(\frac{i}{1!} + \frac{i^2\Delta x}{2!} + \frac{i^3(\Delta x)^2}{3!} \ldots\ldots + \frac{i^n(\Delta x)^{n-1}}{n!} + \ldots\ldots\right)$$

となり、$\Delta x \to 0$ のとき、

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \to ire^{ix}$$

となる。つまり、x で一回微分すると i が掛かる。したがって、二回微分すると -1 が掛かる。ところで、複素数 i は絶対値（動径長）が 1 で偏角が $\dfrac{\pi}{2}$ の複素数である。したがって、一回微分において i が掛かるということは、複素数の偏角を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させることと同等である。

まとめると、

$$\frac{d}{dx} re^{ix} = ire^{ix} \qquad \text{(B.30)}$$

$$\frac{d}{dx} re^{i\alpha x} = i\alpha re^{i\alpha x} \qquad \text{(B.31)}$$

$$\frac{d}{dx} re^{(\alpha+i\beta)x} = (\alpha + i\beta) re^{(\alpha+i\beta)x} \qquad \text{(B.32)}$$

が求まる。